|  |
| --- |
| 结论十四：圆锥曲线中的一类定点问题 |
| 结论 | **若圆锥曲线中内接直角三角形的直角顶点与圆锥曲线的顶点重合,则斜边所在直线过定点.****(1)对于椭圆**$\frac{x^{2}}{a^{2}}$**+**$\frac{y^{2}}{b^{2}}$**=1(a>b>0)上异于右顶点的两动点A,B,以AB为直径的圆经过右顶点(a,0),则直线lAB过定点**$\left(\frac{(a^{2}-b^{2})a}{a^{2}+b^{2}},0\right)$**.同理,当以AB为直径的圆过左顶点(-a,0)时,直线lAB过定点**$\left(-\frac{(a^{2}-b^{2})a}{a^{2}+b^{2}},0\right)$**.****(2)对于双曲线**$\frac{x^{2}}{a^{2}}$**-**$\frac{y^{2}}{b^{2}}$**=1(a>0,b>0)上异于右顶点的两动点A,B,以AB为直径的圆经过右顶点(a,0),则直线lAB过定点**$\left(\frac{(a^{2}+b^{2})a}{a^{2}-b^{2}},0\right)$**.同理,对于左顶点(-a,0),则定点为**$\left(-\frac{(a^{2}+b^{2})a}{a^{2}-b^{2}},0\right)$**.****(3)对于抛物线y2=2px(p>0)上异于顶点的两动点A,B,若**$\vec{OA}$**·**$\vec{OB}$**=0,则弦AB所在直线过点(2p,0).同理,抛物线x2=2py(p>0)上异于顶点的两动点A,B,若**$\vec{OA}$**⊥**$\vec{OB}$**,则直线AB过定点(0,2p).** |
| 解读 | 圆锥曲线中的定值问题一直是近几年来高考试题中的热点问题。解决这类问题时，要善于在动点的“变”中寻求定值或定点的“不变”性，常用特殊值法先确定定点，再转化为有目标的一般性证明，从而达到解决问题的方法。 |
| 典例 | 3．《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著，第九章“勾股”，讲述了“勾股定理”及一些应用.直角三角形的两直角边与斜边的长分别称“勾”“股”“弦”，且“勾2+股2=弦2”，设直线交抛物线于，两点，若，恰好是 的“勾”“股”（为坐标原点），则此直线恒过定点（ ）A． B． C． D． |
| 解析 | 【答案】D【详解】设直线的方程为，，，由 得，由根与系数的关系可得：，，若，恰好是 的“勾”“股”（为坐标原点），可得，所以，即，所以，，所以，即，解得或（舍）所以直线的方程为，恒过点， |
| 反思 | 由题意知，所以，即，设直线的方程为，，，联立直线与抛物线的方程由韦达定理得出，，代入化简得直线的方程即可求出所过的定点.本题的关键点是由，恰好是 的“勾”“股”（为坐标原点），得出，设直线的方程为，，。即，联立方程，结合韦达定理即可求解. |
| 针对训练\*举一反三 |
| 1．已知抛物线，过点引抛物线的两条弦、，分别交抛物线于两点，且，则直线恒过定点坐标为（ ）A． B． C． D．【答案】A【详解】设，，由可得：，化简可得：，直线斜率为，所以，即，，令可得，所以直线直线恒过定点，2．定义：若点在椭圆上，则以 为切点的切线方程为：.已知椭圆 ，点为直线上一个动点，过点作椭圆的两条切线 ，，切点分别为，，则直线恒过定点（ ）A． B． C． D．【答案】C【详解】因为点在直线上，设，，，所以的方程为，又在上，所以①，同理可得②；由①②可得的方程为，即，即，所以，解得，故直线恒过定点3．已知点在抛物线上且位于轴的两侧，（其中为坐标原点），则直线一定过点（ ）A． B．$\left(\frac{1}{2},0\right)$ C． D．【答案】A【详解】当直线的斜率为0时，直线与抛物线只有1个交点，不符合题意，所以直线的斜率不为0，设其方程为，因为点在抛物线上，所以设，所以，解得或．又因为两点位于轴的两侧，所以．联立得，所以，即，所以直线的方程为，所以直线一定过点．4．已知直线过抛物线的焦点，且与抛物线相交于，两点，点关于轴的对称点为，直线与轴相交于点，则点的坐标为（ ）A． B．C． D．【答案】C【详解】由题意，如图所示，设直线，，，，联立，得，，，，，直线的方程为，设直线与轴相交于点，，得．点在抛物线上，，即，，点figure5．已知双曲线，点，在双曲线上任取两点、满足，则直线恒过定点\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；【答案】【解析】设的方程为,则由.设,则是该方程的两根,∴,.又,,故，∴,又,,∴,代入,得：整理得：,∴,∴或.当时,过与题意不符,故舍去。当时,过定点.故答案为：6．已知抛物线的焦点为，是上一点，且，设点是上异于点的一点，直线与直线交于点，过点作轴的垂线交于点则直线过定点，定点坐标为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.【答案】【解析】由题意得，解得，所以，抛物线的标准方程为.设点、，设直线的方程为，联立，消去得，由韦达定理得，，由轴以及点在直线上，得，则由、、三点共线，得，整理得，将韦达定理代入上式并整理得，由点的任意性，得，得，所以，直线的方程为，即直线过定点.7．已知椭圆的离心率为，短轴长为4.（1）求椭圆的方程；（2）过点作两条直线，分别交椭圆于两点（异于），当直线，的斜率之和为4时，直线恒过定点，求出定点的坐标.【答案】（1）（2）见解析【解析】（1）由题意知：，，.解得，，，所以椭圆方程为.（2）当直线的斜率存在时，设直线方程为，，.由，得，联立，消去得，由题意知二次方程有两个不等实根，∴，.代入得，整理得.∵，∴，∴，，所以直线恒过定点.当直线的斜率不存在时，设直线的方程为，，，其中，∴.由，得，∴.∴当直线的斜率不存在时，直线也过定点.综上所述，直线恒过定点.8．双曲线：的左右顶点分别为，，动直线垂直的实轴，且交于不同的两点，直线与直线的交点为.（1）求点的轨迹的方程；（2）过点作的两条互相垂直的弦，，证明：过两弦，中点的直线恒过定点.【答案】（1）；（2）证明见解析.【解析】（1）因为， 设 则且①，因为动直线交双曲线于不同的两点，所以且， 因为直线的方程为②，直线的方程为③， ②③得， 把①代入上式得，化简得， 所以点的轨迹的方程为. （2）依题意得直线与直线斜率均存在且不为0，设直线的方程为，则直线的方程为， 联立得，则，设，，， 所以的中点，同理的中点， 所以直线的斜率为，所以直线的方程为， 整理得， 所以直线恒过定点，即过两弦中点的直线恒过定点.9．已知抛物线:（）上横坐标为4的点到焦点的距离为5．（1）求抛物线的方程；（2）设直线与抛物线交于不同两点，若满足，证明直线恒过定点，并求出定点的坐标．【答案】（1）；（2）见解析，.【解析】（1）抛物线:（）的准线方程为，由抛物线的定义得，，解得，所以抛物线方程为.（2）方法一：设，，，且，皆不为，，，即，，又，，直线斜率为，直线方程为：，即为，直线恒过定点，直线恒过定点，定点坐标为.方法二：设，，由条件可知直线的斜率不为0，可设直线：（），代入,得：，，，，，，即，，，，符合，直线：，则直线恒过定点，直线恒过定点，定点坐标为. |

